Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Odrediti sve proste brojeve p, q i r, $5 \leq p < q < r$, takve da važe nejednakosti $2p^2 - r^2 \geq 49$ i $2q^2 - r^2 \leq 193$.

Rješenje: Primijetimo da relacija $5 \leq p < q < r$ povlači $r \geq 11$ i posljedično je $2p^2 \geq 49+121 = 170$, tj. $p \geq 11$. Dalje, iz početnih nejednakosti dobijamo $2q^2-193 \leq r^2 \leq 2p^2-49$, što daje $q^2 - p^2 \leq 72$. Nejednakost $(q-p)(q+p) \leq 72$ povlači sljedeće mogućnosti:

(i) $q-p = 2$ i $q+p \leq 36$, što daje $(p,q) = (11,13)$ i $(p,q) = (17,19)$;

(ii) $q-p \geq 4$ i $q+p \leq 18$, što je kontradikcija sa $p \geq 11$.

Ako je $(p,q) = (11,13)$, onda $145 \leq r^2 \leq 193$, i $r = 13 = q$, što nije moguće. Konačno, u slučaju da je $(p,q) = (17,19)$ važi $529 \leq r^2 \leq 529$, i zato je $r = 23$. Dakle, traženi prosti brojevi su $p = 17, q = 19$ i $r = 23$. $\square$

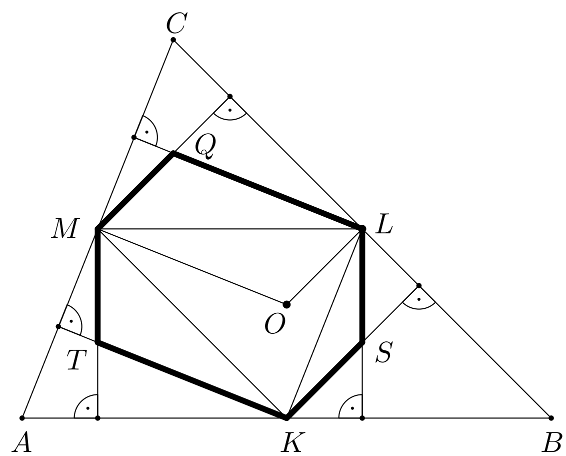
2. Odjeljenje broji 25 učenika. Dokazati da je moguće formirati najviše 30 različitih košarkaških ekipa od po 5 učenika, tako da bilo koje dvije ekipe nemaju više od jednog zajedničkog učenika.

Rješenje: Primijetimo da od 25 učenika možemo formirati $\frac{25\cdot24}{2} = 300$ skupova od po 2 učenika. Naš zadatak sada svodimo na formiranje košarkaških ekipa tako da se svaki par učenika pojavi najviše u jednoj ekipi. Svaki košarkaški tim ima $\frac{5\cdot4}{2} = 10$ skupova od po 2 učenika. Neka je n broj ekipa koje zadovoljavaju uslove zadatka. Tada je $10 \cdot n \leq 300$, inače bi postojao par učenika koji se nalazi u dvije različite ekipe. Dakle $n \leq 30$.

$\square$

3. U oštrouglom trouglu ABC neka su K, L, M sredine duži AB, BC i CA redom. Normale iz tačaka M i K na stranice AB i AC sijeku se u tački T, normale iz tačaka K i L na stranice BC i AB sijeku se u tački S, a normale iz tačaka M i L na stranice BC i AC sijeku se u tački Q. Dokazati da je površina šestougla $KSLQMT$ jednaka polovini površine trougla ABC.

Rješenje:



Primijetimo prvo da je

$$P_{\triangle KLM} = \frac{1}{4} P_{\triangle ABC}, \quad P_{KSLQMT} = P_{\triangle KLM} + P_{\triangle KSL} + P_{\triangle LQM} + P_{\triangle MTK}. \tag{1}$$

Neka je O ortocentar trougla KLM. Kako je $MQ \perp BC$ i $OL \perp BC$ to je $MQ \parallel OL$, a kako je $QL \perp AC$ i $OM \perp AC$ to je $LQ \parallel OM$. Slijedi da je četvorougao $OLQM$ paralelogram, odnosno da je $\triangle OLM \cong \triangle LQM$. Zato je $P_{\triangle OLM} = P_{\triangle LQM}$. Na sličan način se dokazuje da je $P_{\triangle KSL} = P_{\triangle KLO}$ i da je $P_{\triangle MTK} = P_{\triangle KOM}$. Iz (1) sliedi da je $P_{KSLQMT} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}$. $\square$

4. Skup prirodnih brojeva razbijen je na dvočlane skupove $A_n, n \in \mathbb{N}$, tako da se svaki prirodan broj nalazi u tačno jednom od skupova A_n. Da li postoji razbijanje takvo da za svako $n \in \mathbb{N}$ zbir elemenata iz A_n bude jednak $2018 + n$? Detaljno obrazložiti.

Rješenje: Pretpostavimo da postoji takvo razbijanje. Posmatrajamo skupove $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$.

Neka su x_k, y_k elementi skupa A_k, i S suma svih elemenata iz skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$. Tada:

$$S = \sum_{k=1}^{2018}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{2018}(2018 + k) = \sum_{k=1}^{2018} 2018 + \sum_{k=1}^{2018} k = 2018^2 + \frac{2018 \cdot 2019}{2}. \tag{1}$$

Sa druge strane, skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ zajedno imaju $2 \cdot 2018$ brojeva, pa važi:

$$S \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2 \cdot 2018 = \frac{2 \cdot 2018 \cdot (2 \cdot 2018 + 1)}{2}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) imamo da je:

$$2018^2 + \frac{2018 \cdot 2019}{2} \geq \frac{2 \cdot 2018 \cdot (2 \cdot 2018 + 1)}{2},$$

što nije tačno. Naša pretpostavka je netačna, pa ne postoji takvo razbijanje. $\square$